



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Dilatations dans les espaces de Besov

Présenté par :

ZINE HASSAN

Soutenu publiquement le : 03/07/2019.

Devant le jury composé de :

Président : Douadi DRIHEM
Encadreur : Madani MOUSSAI
Examineur : Aissa LAKHAL

Prof.
Prof.
M.A.A.

Université de M'sila
Université de M'sila
Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Au nom D'allah le clément et le miséricordieux

Je tiens tout d'abode à remercier Dieu le tout puissant.

Je remercie *MES PARENTS* et le profe *MOUSSAI* Madani mon encadreur.

Me *DRIHEM* Duadi et *LAKHAL*

Abissa et également à M^r *MOHAMED* Benallia pour son aide.

et à tout ceux qui m'ont aidé.

Dédicaces



À mes chers parents,...

À ma famille,...

À tous mes proches et toutes mes amies,...

Je dédie ce travail.

Résumé

Soit l'application $h_\lambda f := f(\lambda^{-1}(\cdot))$, où $\lambda > 0$ et f une fonction d'un espace de Banach E de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{C} . Il s'agit d'estimer la norme de l'opérateur de dilatation h_λ considéré comme un endomorphisme de l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ou de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Mots-Clés : Dilatation, Espace de Besov, Espace de Lizorkin-Triebel, Composition.

Let the application $h_\lambda f := f(\lambda^{-1}(\cdot))$, where $\lambda > 0$ and f a function defined on Banach space E of \mathbb{R}^n with values in \mathbb{C} . It is about estimating the norm of the dilation operator h_λ considered as an endomorphism of Besov space $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, of Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ or Besov-type $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Keywords : Dilation, Besov space, Triebel-Lizorkin space, Composition .

Table des matières

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 Définitions et propriétés de espaces $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ et $\dot{B}_{p,q}^s$ | 8 |
| 1.1 La décomposition de Littlewood-Paley | 9 |
| 1.1.1 Une partition de l'unité | 9 |
| 1.1.2 Les séries de Littlewood-Paley | 9 |
| 1.2 Les espaces de Besov | 11 |
| 1.2.1 Définitions et quelques propriétés | 11 |
| 1.2.2 Cas particuliers | 11 |
| 1.2.3 Quasi- normes équivalentes | 13 |
| 1.2.4 Inclusions | 14 |
| 1.3 Les espaces de Lizorkin-Triebel | 16 |
| 1.4 Les espaces de type de Besov | 18 |
| 1.4.1 Définitions | 18 |
| 1.4.2 Les espaces de type de Besov homogènes | 20 |
| 1.4.3 Quasi-normes équivalentes | 20 |
| 1.4.4 Inclusions | 21 |
| 2 Dilatation dans les espaces $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ et $\dot{B}_{p,q}^s$ | 22 |
| 2.1 Quelques définitions et inégalités principales | 22 |
| 2.2 Les dilatations dans les espaces de Besov, Lizorkin-Triebel et de type de Besov | 24 |
| 3 Application à la composition | 36 |

Introduction

Il s'agit d'une étude dans les espaces de Besov, Triebel-Lizorkin, et de type de Besov .

Nous étudions dans ce travail l'opérateur de dilatation h_λ défini par $h_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ et estimer sa norme .

Le premier chapitre contient les définitions de les espaces de Besov, Triebel-Lizorkin et de type de Besov, en utilisant les séries de Littlewood-Paley qui se basent sur la décomposition de l'unité d'une fonction $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, contient quelques propriétés qui résultent de ces définitions, et des quasi normes équivalentes.

Nous allons donné la preuve de certaines propositions et inclusions, pour plus de détails nous référons aux [10, 11] pour les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin et à [13] pour l'espace de type de Besov .

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques propriétés et nous estimons la norme de l'opérateur de dilatation h_λ dans ces espaces $(B_{p,q}^s, F_{p,q}^s \dots)$.

Dans le troisième chapitre nous allons étudier l'opérateur de composition défini par $\mathcal{T}_f(g) := f \circ g$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Nous donnons quelques propriétés, et nous estimons $\|h_\lambda(f \circ g)\|$ d'après des résultats précédents .

Notation

- $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$.
- $C(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \text{ est compact}\}$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ son dual.
- L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- On définit le produit de convolution de deux fonctions par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

- \mathcal{P}_∞ : l'espace de tous les polynômes.
- $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ L'espace des distributions tempérées modulo les polynômes.
- Pour $0 < p \leq \infty$, on définit les espaces de Lebesgue $L_p(\mathbb{R}^n)$ par les f mesurables telles que

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ si } 0 < p < \infty \text{ et } \|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess } |f(x)| < \infty.$$

- Pour $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

et la transformée de Fourier inverse de f par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

- $C, c_1, c_2, c' \dots$ désignent des constantes positives.
- Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note p' le nombre réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (p' est l'exposant conjugué de p).
- $\ell_q(\mathbb{N}) = \left\{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|a_i\|_{\ell_q(\mathbb{N})} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^q \right)^{1/q} < \infty, 0 < q < \infty \right\}$.
- $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DE ESPACES

$$B_{p,q}^s \text{ ET } F_{p,q}^s \text{ ET } \dot{B}_{p,q}^s$$

Ce chapitre contient les définitions des espaces de Besov, Triebel-Lizorkin et de type de Besov, en utilisant les séries de Littlewood-Paley qui se basent sur la décomposition de l'unité d'une fonction $f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons donner la preuve de certaines propositions et inclusions. Pour plus de détail nous référons aux [10, 11] pour les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin et à [13] pour l'espace de type de Besov .

1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

La décomposition de littlewood-Paley est une technique très utile dans la définition des espaces fonctionnels en général, en particulier les espaces de Besov.

1.1.1 Une partition de l'unité

Définition 1.1. (Fonction cut-off) Une fonction ρ est dite (**cut-off**) si elle est : $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive et radiale sur \mathbb{R}^n , telle que :

$$\begin{cases} \rho(\xi) = 1 & \text{si } |\xi| \leq 1 \\ 0 < \rho(\xi) < 1 & \text{si } 1 < |\xi| < \frac{3}{2} \\ \rho(\xi) = 0 & \text{si } |\xi| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Soit γ la fonction définie par : $\gamma(x) := \rho(x) - \rho(2x)$. $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et radial á support compact dans $(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^j \xi) = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (1.1)$$

et

$$\rho(\xi) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j} \xi) = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

La formule (1.1) est appelée une partition homogène de l'unité.

La fonction γ est portée par la couronne $\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}$ (avec $\text{supp} \gamma \in \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\}$).

1.1.2 Les séries de Littlewood-Paley

Maintenant on définit les opérateurs de convolution $S_j : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$

et $Q_j : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par :

$$Q_j f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-j} \cdot)) * f(x) \quad , j \geq 1$$

$$S_k f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-k} \cdot)) * f(x) \quad , k \geq 0.$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{F}(Q_j f)(\xi) = \gamma(2^{-j} \xi) \cdot \hat{f}(\xi) \quad , j \geq 1$$

$$\mathcal{F}(S_k f)(\xi) = \rho(2^{-k} \xi) \cdot \hat{f}(\xi) \quad , k \geq 0.$$

Théorème 1.1. Pour toute fonction $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$f = S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

La formule (1.3) est appelée la série de Littlewood-Paley non homogène de la fonction f .

Pour $k=0$ on a :

$$f = S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f$$

En posant $Q_0 = S_0$ on a

$$f = \sum_{j \geq 0} Q_j f. \quad (1.4)$$

On obtient aussi

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = \sum_{j=0}^k Q_j f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f.$$

Alors il découle

$$S_k f = \sum_{j=0}^k Q_j f$$

La série (1.4) converge au sens des distributions tempérées, voir [6]

Remarque 1.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$\text{supp } \mathcal{F}(Q_j f) \subset \text{supp } \gamma(2^{-j} \cdot)$$

et

$$\text{supp } \mathcal{F}(S_k f) \subset \text{supp } \rho(2^{-k} \cdot).$$

Soit $f \in S'$ et $a > 0$, on définit les opérateurs maximaux associés aux Q_j et S_k par :

$$Q_j^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(x-y)|}{(1+2^j|y|)^a} \quad \text{et} \quad S_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|S_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a}.$$

1.2 Les espaces de Besov

1.2.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 1.2. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, +\infty]$. L'espace de Besov noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$, avec

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{j \geq 1} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Remarque 1.2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\|f\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Q_j f(x)| \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall \quad 0 < q < \infty$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \geq 0} \left(2^{sj} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Q_j f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad \forall \quad 0 < p < \infty$$

$$\|f\|_{B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \geq 0} 2^{sj} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Q_j f(x)| \right).$$

Proposition 1.1. Les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < p, q < 1$, et des Banach pour $p, q \in [1, +\infty]$.

1.2.2 Cas particuliers

$$1. \quad B_{p,p}^0(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^0(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p < \infty.$$

$$2. \quad B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) \quad (\text{L'espace de Lizorkin-Triebel}), \quad 1 \leq p < \infty.$$

3. $B_{p,p}^m(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$.

Soient $p \in [1, \infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. L'espace de Sobolev $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha, |\alpha| \leq m$.

L'espace de Sobolev est normé par $\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p$.

4. $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0, s \notin \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$.

$W_p^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Slobodeckij.

Soient $p \in [1, \infty[$, $s \in]0, \infty[$ non entier et $m \in \mathbb{N}$ tels que $s \in]m, m+1[$.

L'espace de Slobodeckij est l'espace de toutes les fonctions $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+(m+1-s)p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

5. $B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_2^s(\mathbb{R}^n)$ (espace de Bessel).

Soient $s \in \mathbb{R}$. L'espace H_2^s est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(\xi)(.)]$ soit une distribution régulière et

$$\|f\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(\xi)(.) \right] \right\|_p < \infty$$

6. $B_{\infty,\infty}^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$. $\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Zygmund.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)} < \infty \text{ avec}$$

$$\|f\|_{B_{\infty,\infty}^m(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{h \neq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha f(x+2h) - 2\partial^\alpha f(x+h) + \partial^\alpha f(x)|}{|h|} = \|f\|_{\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)}.$$

7. $B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ et $s \notin \mathbb{N}$. $C^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Hölder.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $s \in]m, m+1[$. L'espace $C^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions

$f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^{s-m}} < \infty.$$

1.2.3 Quasi- normes équivalentes

On définit maintenant autres quasi-normes dans l'espace de Besov .

Définition 1.3. Soient f une fonction arbitraire et $h \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-1)^l f(x + (m-l)h), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

on a $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$ et $\Delta_h^{m+1} f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^m f(x))$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Théorème 1.2. Soient $m \in \mathbb{N}$, $0 < s < m$ et $p, q \in [1, \infty]$. Alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\} \text{ pour } q < \infty,$$

et

$$B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \left(\|f\|_p + \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-s} \|\Delta_h^m f\|_p \frac{dh}{|h|^n} \right) < \infty \right\}.$$

Dans le sens des quasi-normes équivalentes dans l'espace $B_{p,q}^s$.

On peut remplacer $\int_{\mathbb{R}^n} \dots dh$ par $\int_{|h|<a} \dots dh$, pour tout $a > 0$, car la partie $\int_{|x|\geq a} \dots dh$ est majoré par $\|f\|_p$.

Preuve Voir [10].

Soient $\Phi_0, \Phi \in S(\mathbb{R}^n)$ tele que

$$|(\mathcal{F}\Phi_0)(\xi)| > 0 \text{ sur } \{|\xi| < 2\varepsilon\},$$

$$|(\mathcal{F}\Phi)(\xi)| > 0 \text{ sur } \left\{ \frac{\varepsilon}{2} < |\xi| < 2\varepsilon \right\},$$

pour certain $\varepsilon > 0$, et

$$D^\alpha(\mathcal{F}\Phi)(0) = 0, \text{ pour tout } \|\alpha\|_{\ell(\mathbb{N})} < R,$$

avec $\phi_0(\xi) + \int_0^1 \phi(t\xi) \frac{dt}{t} = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

On note

$$\Phi_k = 2^{kn} \Phi(2^k \cdot), \quad k \in \mathbb{N} \text{ et } \Phi_t = \frac{1}{t^n} \Phi(t^{-1} \cdot), \quad t > 0$$

Théorème 1.3. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q < \infty$, $a > \frac{n}{p}$ et $R + 1 > s$.

L'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ peut être caractérisé par

$$B_{p,q}^s = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|^{(i)} < \infty \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

avec

$$\begin{aligned} \|f\|^{(1)} &= \|\Phi_0 * f\|_p + \left(\int_0^1 t^{-sq} \|(\Phi_t * f)\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \\ \|f\|^{(2)} &= \|(\Phi_0^* f)_a\|_p + \left(\int_0^1 t^{-sq} \left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Phi_t * f)(\cdot + z)|}{(1 + \frac{|z|}{t})^a} \right\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \\ \|f\|^{(3)} &= \left(\sum_{K=0}^{\infty} 2^{sqK} \left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{|(\Phi_K * f)(\cdot + z)|}{(1 + 2^K |z|)^a} \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}. \\ \|f\|^{(4)} &= \left\| \left\{ 2^{sk} \|\Phi_k * f\|_p \right\}_k \right\|_{\ell_q(\mathbb{N})}. \end{aligned}$$

Les quasi-normes $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$, $\|\cdot\|^{(3)}$, $\|\cdot\|^{(4)}$ sont équivalentes dans $B_{p,q}^s$.

Preuve Voir [9]

1.2.4 Inclusions

Définition 1.4. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces quasi-Banach. On dit que X s'injecte dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$ si $X \subseteq Y$ et l'application identique définie de X dans Y est continue, c'est-à-dire il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in X$ on a

$$\|f\|_Y \leq C \|f\|_X.$$

Proposition 1.2. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Alors

$$B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 1.3. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. Alors

$$B_{p,q}^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \quad \alpha > 0.$$

Proposition 1.4. Soient $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ et $s, t \in \mathbb{R}$ (avec : $s > t$) et tel que

$$s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}. \quad \text{Alors}$$

$$B_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_2,q}^t(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.5. Soient $0 < q \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty$ et $s \in]0, +\infty[$. Alors :

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.6. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. L'opérateur de dérivation ∂^α envoie continument $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.

Autrement dit, si $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Alors $\partial^\alpha f \in B_{p,q}^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.

En particulier, $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \Rightarrow f' \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.7. Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, r, q \leq \infty$, si $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ ou $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ et $q = 1$,
Alors :

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.8. Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$,

Alors :

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n).$$

Pour la preuve de toutes ces propositions on peut voir [10, 7, 1, 8].

Nous allons maintenant définir l'espaces de Besov homogène et non homogène.

Définition 1.5. (L'espace $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$)

Soient $f, h, k \dots \in S'(\mathbb{R}^n)$,

On pose $[f] = \{g : g = f + p, \quad p \text{ est un polynôme arbitraire} \}$, on définit l'espace des distributions modulo les polynôme S'_∞ comme suivante :

$S'_\infty(\mathbb{R}^n) = \{ [0], [f], [h], [k] \dots \}$ telle que

$[0]$ est une classe des polynômes .

$[f], [h], [k] \dots$ sont des classes des fonctions.

Définition 1.6. Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, l'espace de Besov homogène noté

$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des toutes les fonctions $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|Q_j f\|_p < \infty \text{ pour } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.9. Pour $s > 0$, l'espace de Besov non homogène $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, telles que $[f] \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, avec

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve Voir [11].

1.3 Les espaces de Lizorkin-Triebel

Définition 1.7. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$ est l'ensemble des $f \in S'$ telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\| \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} |Q_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty \text{ pour } q \neq \infty. \\ \left\| \sup_{j \geq 0} (2^{sj} |Q_j f|) \right\|_p < +\infty \text{ pour } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.10. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < q \leq \infty$. Alors :

1. $F_{p,q}^s$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$).
2. $F_{p,2}^0 = L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$.
3. $F_{p,2}^m = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty, m \in \mathbb{N}^*$. ($W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev).

4. $F_{p,2}^s = H_p^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$ où H_p^s est l'espace des potentiels de Bessel des $f \in S'$ telles que

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi)) \right\|_p < +\infty.$$

5. $F_{p,p}^s = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < \infty$.

Preuve Voir [4].

Proposition 1.11. Soient $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$ et $0 < p_0, p_1, p < \infty$. Alors :

1. $F_{p,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q_1}^{s_1}$ si $s_0 > s_1$.
2. $F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s$ si $q_0 \leq q_1$.
3. $F_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p_1,q_1}^{s_1}$ si $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < p_0 < p_1 < \infty$.

Preuve Voir [?].

Proposition 1.12. .

- (iv) Soient $0 < p_0 < p < \infty$, $s_0 - \frac{n}{p_0} \geq s - \frac{n}{p}$ et $0 < q, r \leq \infty$. Alors

$$F_{p_0,q}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,r}^s.$$

- (v) Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$. Alors

$$S \hookrightarrow F_{p,\infty}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s \hookrightarrow S'.$$

Définition 1.8. Soient $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $a \geq n/\min(p, q)$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors

$$F_{p,q}^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} (Q_j^{*,a} f)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty \right\},$$

(avec une modification si $q = \infty$) au sens des quasi normes équivalentes .

Proposition 1.13.

(i) Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < u, v, q \leq \infty$, Alors

$$B_{p,u}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,v}^s$$

pour toute u et v tels que

$$0 < u \leq \min(p, q) \text{ et } \max(p, q) \leq v \leq \infty.$$

(ii) Soient $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $s_0 - (n/p_0) = s - (n/p) = s_1 - (n/p_1)$ et

$0 < u, v, q \leq \infty$, Alors

$$B_{p_0,u}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,v}^{s_1}$$

pour toute u et v tels que

$$0 < u \leq p \leq v \leq \infty.$$

Preuve Voir [8] ou [10].

1.4 Les espaces de type de Besov

1.4.1 Définitions

Définition 1.9. Soient $v := (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $K \in \mathbb{Z}$, le cube dyadique de longueur de côté 2^{-k} est la partie de \mathbb{R}^n définie par

$$P_{k,v} := \{x \in \mathbb{R}^n : v_j \leq 2^k x_j < v_j + 1, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Proposition 1.14. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^n} P_{k,v}$.

preuve

Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$2^k [x_j] \leq 2^k x_j < 2^k ([x_j] + 1), (j = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Pour k fixé, $[x_j]$ est le seul entier vérifiant (1.5), autrement dit chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est contenu dans un seul cube dyadique de longueur de côté 2^{-k} .

■

Lemme 1.1. *On a la propriétés suivantes :*

les coins d'un cube dyadique de longueur de côté sont dans $2^{-k}\mathbb{Z}^n$.

Définition 1.10. Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $s, \tau \in \mathbb{R}$. L'espace de type de Besov noté $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, telles que $\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ où

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{v \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \left\{ \int_{P_{k,v}} |Q_j f(x)|^p dx \right\}^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

avec la modification usuelle pour $p = \infty$ ($q = \infty$).

Remarque 1.3. L'espace $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est un quasi-Banach pour $0 < p < 1$ ou $0 < q < 1$ et de Banach pour $p, q \geq 1$.

Remarque 1.4. Les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ sont indépendants du choix de la fonction ρ , si on choisit une autre fonction avec les mêmes propriétés que ρ on obtient des quasi-normes équivalentes à celles qui sont définies par ρ .

Exemple 1.1. Soit $r > 0$ si on choisit la fonction $\rho_r(x)$ telle que $\rho_r(x) = 0$ si $|x| \geq 3r/2$ et $\rho_r(x) = 1$ si $|x| \leq r$, et on pose $\gamma_r(x) := \rho_r(x) - \rho_r(2x)$ qui est porté par l'ensemble $r/2 \leq |x| \leq 3r/2$.

On obtient pour tout $f \in S(\mathbb{R}^n)$ (resp. $S'(\mathbb{R}^n)$)

$$S_{r,k}f = \mathcal{F}^{-1}(\rho_r(2^k \cdot)) * f \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$Q_{r,j}f = \mathcal{F}^{-1}(\gamma_r(2^j \cdot)) * f \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

tel que $Q_{r,0} = S_{r,0}$.

Donc $f = \sum_{j \geq 0} Q_{r,j}f$ dans $S(\mathbb{R}^n)$ (resp. $S'(\mathbb{R}^n)$).

Si on remplaçons Q_j par $Q_{r,j}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) dans les définitions de $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ nous obtenons des quasi-normes équivalentes dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ respectivement.

1.4.2 Les espaces de type de Besov homogènes

$\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble de tous les polynômes de \mathbb{R}^n , $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\langle f, u \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$. le dual de $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace des distributions modulo les polynômes noté $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.11. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s, \tau \in \mathbb{R}$. L'espace de type de Besov homogène $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions modulo les polynômes f telle que $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, où

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{v \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left\{ \int_{P_{k,v}} (2^{sj} |Q_j f(x)|)^p dx \right\}^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

Remarque 1.5.

- $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} = 0$ ssi $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$. L'espace quotient $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach, il sera noté $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et ses éléments $[f]_\infty = f + \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ où $f \in \dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ seront notés f .
- $\dot{B}_{p,q}^{s,0}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, où $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Besov homogène.
- Si $\tau < 0$ alors $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.4.3 Quasi-normes équivalentes

Définitions équivalentes

Définition 1.12. Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, \infty]$ et $0 < p, q \leq \infty$.

L'espace $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} \|Q_j f\|_{L_p(B_J)}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

où le \sup est prise sur tout $J \in \mathbb{Z}$ et toutes les boules B_J de \mathbb{R}^n de rayon 2^{-J} .

Proposition 1.15. Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $\tau, s \in \mathbb{R}$

- (1) Si $\tau < 0$ alors $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.
- (2) $B_{p,q}^{s,0}(\mathbb{R}^n) = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (3) si $(\tau > 1/p \text{ et } 0 < q < \infty)$ ou $(\tau = 1/p \text{ et } q = \infty)$ alors

$$B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = B_{\infty,\infty}^{s+n\tau-(n/p)}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve Voir [13] et [12]

Remarque 1.6. L'espace $B_{\infty,\infty}^{s+n\tau-(n/p)}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder .

1.4.4 Inclusions

Définition 1.13. Soient $0 < p \leq \infty$ et $0 \leq \tau < \infty$,l'espace de type de Lebesgue noté $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}} \sup_{v \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \|f\|_{L_p(P_{k,v})} < \infty.$$

Remarque 1.7. Si on remplace $k \in \{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$ par $k \in \mathbb{N}$ et on considère l'ensemble \mathfrak{T} des fonctions f telles que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{v \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \|f\|_{L_p(P_{k,v})} < \infty,$$

Alors $\mathfrak{T} = \{0\}$.

Proposition 1.16. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < \infty$ et $0 < p, q \leq \infty$, avec $p < \infty$ dans le cas de Lizorkin-Triebel.

(I) Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < q_1, q_2 \leq \infty$. Alors

$$B_{p,q_1}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q_2}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si } q_1 \leq q_2,$$

$$B_{p,q_1}^{s+\varepsilon,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q_2}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$$

$$B_{p,\min(p,q)}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n).$$

Où $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de type de Lizorkin-Triebel.

(II) Soient $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ et $-\infty < s_1 < s_0 < \infty$. Alors

$$B_{p_0,q}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_1,q}^{s_1,\tau}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si } s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}.$$

(III) Si $1 \leq p \leq \infty$. Alors

$$B_{p,1}^{0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,1}^{0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p^\tau(\mathbb{R}^n).$$

(IV) Soient $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Alors

$$B_{p_2,q}^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_1,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [3, 13]

DILATATION DANS LES ESPACES

$B_{p,q}^s$ ET $F_{p,q}^s$ ET $\dot{B}_{p,q}^s$

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelque propriété et on estimer la norme de l'opérateur de dilatation h_λ dans certaines espaces $(B_{p,q}^s, F_{p,q}^s, \dots)$.

2.1 Quelques définitions et inégalités principales

Définition 2.1. Soit $\lambda > 0$, on définit l'opérateur de dilatation h_λ comme suit :

$$h_\lambda f(x) = f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Inégalité de Young

Proposition 2.1. Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve

Soit l'opérateur $T_g(f) = f * g$ telle que $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \text{On a } |T_g(f)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \\ &\leq \|f(x-\cdot)\|_{q'} \|g\|_q \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_{q'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T_g\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}$$

$$\Rightarrow T_g : L^{q'} \rightarrow L^\infty$$

et on a $\|T_g\|_q = \|f * g\|_q$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \right)^q}_{h(x)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{\|\psi\|_{q'} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \psi(x) dx \right) \\ &\leq \sup_{\|\psi\|_{q'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \cdot \psi(x) dx dy \\ &\leq \sup_{\|\psi\|_{q'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \|g(\cdot - y)\|_q \cdot \|\psi\|_{q'} dy \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_g : L^1 \rightarrow L^q$$

Alors $T_g : L^{q'} \rightarrow L^\infty$

et $T_g : L^1 \rightarrow L^q$

Par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin

On a $T_g : L^p \rightarrow L^r$ telle que

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_r &\leq \|g\|_q^{1-\theta} \|g\|_q^\theta \|f\|_p \\ &\leq \|g\|_q \|f\|_p \end{aligned}$$

$$\text{où } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q'} + \frac{\theta}{1} \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{q} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}$$

$$\text{donc } \frac{1}{p} = (1-\theta)(1 - \frac{1}{q}) + \theta$$

$$\text{Alors } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Inégalité de Hausdorff-Young

$$\text{On a } \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$$

$$(\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n))$$

Et on a l'inégalité de Persoval $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_2$

$$(\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)).$$

La transformée de Fourier est une application linéaire donc nous appliquons

le théorème de Riesz-Thorin.

On a $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, avec $\frac{1}{p} = (1 - \theta) + \frac{\theta}{2}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors $q = p'$ (p' est l'exposant conjugué de p) et $\|\mathcal{F}(f)(f)\|_{p'} \leq (2\lambda)^{(n/p')} \|f\|_p$.

$$(\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)).$$

Remarque 2.1.

$$\forall \lambda > 0 \quad \mathcal{F}(h_\lambda Q_j f)(\xi) = \lambda^{-n} \mathcal{F}(Q_j f)(\lambda^{-1} \xi) \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Il suffit de faire un changement de variable

2.2 Les dilatations dans les espaces de Besov, Lizorkin-Triebel et de type de Besov

Théorème 2.1. Soit $s > 0, p, q \in [1, +\infty]$.

L'opérateur h_λ est borné sur $B_{p,q}^s$ est sa norme est majorée par $c\lambda^{-n/p} (\sup(\lambda, 1))^s$.

Peuve

Par la formule (1.4) on a $f = \sum_{j \geq 0} Q_j f$. On choisit $N \in \mathbb{Z}$ tel que $2^N \leq \lambda < 2^{N+1}$

($N > 0$ pour $\lambda > 1$ et $N < 0$ pour $\lambda < 1$) et on a

$$\text{supp} \mathcal{F}(Q_j f) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \quad \forall j \geq 1\}$$

$$\text{d'où } \text{supp} \mathcal{F}(h_\lambda Q_j f) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \lambda 2^{j-1} \leq |\xi| \leq \lambda 2^{j+1} \quad \forall j \geq 1\}$$

$$\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{N+j-1} \leq |\xi| \leq 2^{N+j+2} \quad \forall j \geq 1\}$$

et $\text{supp} \mathcal{F}(h_\lambda Q_0 f) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{N+2}\}$.

Donc on trouve

$$Q_k(h_\lambda Q_j f) \neq 0 \quad \text{si } j \in \mathbb{N}, k \leq 1 \text{ et } k \in \{N+j-1, j+N, N+j+1\}. \quad (2.1)$$

$$Q_0(h_\lambda Q_j f) = 0 \quad \text{si } j \geq 2. \quad (2.2)$$

a) Le cas $\lambda > 1$

$$\begin{aligned} \|h_\lambda f\|_{B_{p,q}^s} &= \left\| \sum_{j \geq 0} h_\lambda Q_j f \right\|_{B_{p,q}^s} \\ &\leq \|h_\lambda Q_0 f\|_{B_{p,q}^s} + \left\| \sum_{j \geq 1} h_\lambda Q_j f \right\|_{B_{p,q}^s} \end{aligned}$$

Je vais commencer par le terme $\left\| \sum_{j \geq 1} h_\lambda Q_j f \right\|_{B_{p,q}^s}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \geq 1} h_\lambda (Q_j f) \right\|_{B_{p,q}^s} &= \left(\sum_{k \geq 0} 2^{skq} \left\| \sum_{j \geq 1} Q_k (h_\lambda Q_j f) \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \underbrace{\left\| \sum_{j \geq 1} Q_0 (h_\lambda Q_j f) \right\|_p}_{I_1} + \underbrace{\left(\sum_{k \geq 1} 2^{skq} \left\| \sum_{j \geq 1} Q_k (h_\lambda Q_j f) \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}}_{I_2} \end{aligned}$$

Estimation de I_1

$$I_1 \leq \|Q_0(h_\lambda Q_1 f)\|_p + \underbrace{\left\| \sum_{j \geq 2} Q_0(h_\lambda Q_j f) \right\|_p}_{=0}$$

$$\left\| \sum_{j \geq 2} Q_0(h_\lambda Q_j f) \right\|_p = 0 \text{ car } \text{supp } \mathcal{F}(Q_0(h_\lambda Q_j f)) = \emptyset \text{ pour } j \geq 2.$$

Par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \|h_\lambda Q_1 f\|_p \\ &\leq c \lambda^{\frac{-n}{p}} \|Q_1 f\|_p \\ &\leq c \lambda^{\frac{-n}{p} + s} \|Q_1 f\|_p \\ &\leq c \lambda^{\frac{-n}{p} + s} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \lambda^{\frac{-n}{p} + s} \|f\|_{B_{p,q}^s}. \end{aligned}$$

Estimation de I_2

$$I_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{skq} \left\| \sum_{j=k-N-2}^{j=k-N+1} Q_k(h_\lambda Q_j f) \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

On pose $j - k + N = i$, on a alors

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{skq} \left\| \sum_{i=-2}^1 Q_k(h_{\lambda} Q_{k-N+i} f) \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \sum_{i=-2}^1 \left(\sum_{k \geq 1} 2^{skq} \|Q_k(h_{\lambda} Q_{k-N+i} f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq c \sum_{i=-2}^1 \left(\sum_{k \geq 1} 2^{skq} \|h_{\lambda}(Q_{k-N+i} f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young

On pose $m = k - N + i$

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq c \sum_{i=-2}^1 \left(\sum_{m \geq i+1-N} 2^{(m+N-i)qs} \|h_{\lambda}(Q_m f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq c \left(\sum_{m \geq 0} 2^{(m+N)qs} \|h_{\lambda}(Q_m f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq c \left(\sum_{m \geq 0} 2^{(m+N)qs} \|Q_m f(\lambda \cdot)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq c \lambda^{\frac{-n}{p}} \cdot 2^{Ns} \left(\sum_{m \geq 0} 2^{mqs} \|Q_m f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ car } 2^{Ns} \leq \lambda^S \\
 &\leq c \lambda^{\frac{-n}{p} + s} \|f\|_{B_{p,q}^s}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \sum_{j \geq 1} h_{\lambda} Q_j f \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq I_1 + I_2 \leq c \lambda^{\frac{-n}{p} + s} \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Il reste à estimer la norme de $h_{\lambda}(Q_0 f)$, on applique l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|Q_j(h_{\lambda} Q_0 f)\|_p &\leq c \|h_{\lambda} Q_0 f\|_p \\
 &= c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|Q_0 f\|_p \\
 &\leq c' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } \|h_{\lambda}(Q_0 f)\|_{B_{p,q}^s} &\leq c \left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{sjq} \|Q_j(h_{\lambda} Q_0 f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq c' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^s} \left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{sjq} \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Finalement $\left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{sjq} \right)^{\frac{1}{q}}$ est équivalente à λ^s pour $s > 0$, et à $(1 + \log \lambda)^{\frac{1}{q}}$ pour $s = 0$, car

Pour $s > 0$ on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{sjq} \right) &= \frac{2^{sq(N+3)} - 1}{2^{sq} - 1} \geq \frac{2^{sq(N+2)} \cdot 2^{sq}}{2^{sq}} \\ &\geq 2^{sq(N+1)} > \lambda^{sq}. \end{aligned}$$

Pour $s = 0$ on a $\sum_{j=0}^{N+2} 1 = N + 3$, et

$$\begin{aligned} \lambda < 2^{N+1} &\Rightarrow 2^2 \lambda < 2^{N+3} \\ &\Rightarrow 2 \log 2 + \log \lambda < (N + 3) \log 2 \\ &\Rightarrow 1 + \log \lambda < c(N + 3). \end{aligned}$$

b) Le cas $\lambda < 1$

$$\begin{aligned} \|h_\lambda f\|_{B_{p,q}^s} &\leq \left\| \sum_{j \geq -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{B_{p,q}^s} + \left\| \sum_{j < -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{B_{p,q}^s} \\ &\leq I_4 + I_5 \end{aligned}$$

Estimation de I_4 : (Nous allons d'estimer comme dans le cas $\|\sum_{j \geq 1} h_\lambda(Q_j f)\|_{B_{p,q}^s}$)

$$\begin{aligned} I_4 &= \left\| \sum_{j \geq -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{j \geq -N} 2^{sq(j+N)} \|h_\lambda(Q_j f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c' \lambda^{s-\frac{1}{q}} \left(\sum_{j \geq -N} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{n}{p}} \\ &\leq c'' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^s}. \\ I_5 &= \left\| \sum_{j < -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{B_{p,q}^s} = \left(\sum_{k=0}^2 2^{skq} \left\| Q_k \left(\sum_{j < -N} h_\lambda Q_j f \right) \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{d'après 2.2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \left\| \sum_{j < -N} Q_k(h_\lambda Q_j f) \right\|_p \\ \text{Par l'inégalité de Young} &\leq c_1 \left\| \sum_{j < -N} h_\lambda Q_j f \right\|_p \\ &\leq c_2 \lambda^{-\frac{n}{p}} \sum_{j < -N} \|Q_j f\|_p \end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder où $(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1)$

$$\leq c_3 \lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\sum_{j < -N} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j < -N} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c_4 \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^s} \left(\sum_{j < -N} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$$

On a la série $\left(\sum_{j < -N} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$ est équivalent à c pour $s > 0$ et équivalent à $(1 + |\log \lambda|)^{\frac{1}{q'}}$ pour $s = 0$ car :

pour $s = 0$ on a $\sum_{j < -N} 2^{-sjq'} = (1 - N)$

Et on a

$$2^N \leq \lambda < 2^{N+1}$$

$$\Rightarrow N \leq \frac{\log \lambda}{\log 2} < (N + 1)$$

$$\Rightarrow (-N - 1) < \frac{|\log \lambda|}{\log 2} \leq -N$$

$$\Rightarrow -N < 1 + \frac{|\log \lambda|}{\log 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (N - 1) &\leq (1 + 1 + \frac{|\log \lambda|}{\log 2}) \\ &\leq c(1 + |\log \lambda|) \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2. Pour $q = \infty$

$$\begin{aligned} \|h_\lambda f\|_{B_{p,\infty}^s} &= \sup_{j \geq 0} \left(2^{sj} \|Q_j h_\lambda f\|_p \right) \\ &\leq \lambda^{-\frac{n}{p}} \sup_{j \geq 0} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_p \right) \\ &\leq \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,\infty}^s} \end{aligned}$$

Proposition 2.2. Soit $p, q \in [1, +\infty]$.

l'opérateur h_λ est borné sur $B_{p,q}^0$ est sa norme est majorée par $c\lambda^{-\frac{n}{p}}(1 + |\log \lambda|)^\beta$ où $\beta = \frac{1}{q}$

pour $\lambda > 1$ et $\beta = 1 - \frac{1}{q}$ pour $\lambda < 1$.

Corollaire 2.1. Soient $2 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$ et $p' < r \leq +\infty$; si $f \in B_{p,q}^0$ et $\hat{f} \in L^r$

on a pour $\lambda > 1$, $\|h_\lambda f\|_{B_{p,q}^0} \leq c\lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\|f\|_{B_{p,q}^0} + \|\hat{f}\|_r \right)$.

Peuve

Premièrement on estimer $\|Q_j(\delta_\lambda S_0 f)\|_p$; l'hypothèse $p \leq 2$ permet d'utiliser l'inégalité de Hausdorff-Young on a donc

$$\|Q_j(h_\lambda S_0 f)\|_p \leq c \|\mathcal{F}(Q_j(h_\lambda S_0 f))\|_{p'}$$

$$\leq c \|\gamma(2^{-j}\xi) \mathcal{F}(h_\lambda S_0 f)\|_{p'}$$

$$\leq c \lambda^{-n} \left\| \gamma(2^{-j}\xi) \mathcal{F}(S_0 f) \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \right\|_{p'}$$

$$\leq c \lambda^{-n} \left\| \gamma(2^{-j}\xi) \rho \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \hat{f} \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \right\|_{p'}$$

$$\leq c \lambda^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \gamma(2^{-j}\xi) \rho \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \hat{f} \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}}$$

on pose $\frac{\xi}{\lambda} = t \implies d\xi = \lambda^n dt$

$$\leq c \lambda^{-n-\frac{n}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \gamma(2^{-j}\lambda t) \rho(t) \hat{f}(t) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

on pose $\frac{1}{p'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{u}$

Par Hlder $\leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\gamma(2^{-j}\lambda t)|^u dt \right)^{\frac{1}{u}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(t) \hat{f}(t)|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}$

$$\leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\gamma(2^{-j}\lambda t)|^u dt \right)^{\frac{1}{u}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(t)|^r |\hat{f}(t)|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

on a $|\rho(t)| \leq \|\rho(t)\|_\infty$

$$\leq c' \lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\gamma(2^{-j}\lambda t)|^u dt \right)^{\frac{1}{u}} \cdot \|\hat{f}\|_r$$

on pose $2^{-j}\lambda t = x \implies dt = 2^{jn} \lambda^{-n} dx$

$$\leq c' \lambda^{\frac{n}{r}-n} 2^{jn\frac{1}{u}} \|\gamma\|_u \cdot \|\hat{f}\|_r$$

$$\leq c'' \lambda^{\frac{n}{r}-n} 2^{jn(\frac{1}{p'}-\frac{1}{r})} \cdot \|\hat{f}\|_r$$

par hypothèse sur r on a $2^{n(\frac{1}{p'}-\frac{1}{r})} > 1$, d'où

$$\begin{aligned} \|h_\lambda(S_0 f)\|_{B_{p,q}^0} &\leq c \left(\sum_{j=0}^{N+2} \|Q_j(h_\lambda S_0 f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c_1 \lambda^{\frac{n}{r}-n} \left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{jqn(\frac{1}{p'}-\frac{1}{r})} \right)^{\frac{1}{q}} \|\hat{f}\|_r \end{aligned}$$

$$\leq c_2 \lambda^{-\frac{n}{p}} \left\| \hat{f} \right\|_r.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \|h_\lambda f\|_{B_{p,q}^0} &\leq \|h_\lambda(S_0 f)\|_{B_{p,q}^0} + \left\| h_\lambda \left(\sum_{j \geq 1} Q_j f \right) \right\|_{B_{p,q}^0} \\ &\leq c' \lambda^{-\frac{n}{p}} \left\| \hat{f} \right\|_r + c'' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^0} \\ &\leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} (\|f\|_{B_{p,q}^0} + \left\| \hat{f} \right\|_r). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3. Soient $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s > 0$. Alors

h_λ est un opérateur borné sur $F_{p,q}^s$, et

$$\|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} (\sup(\lambda, 1))^s \|f\|_{F_{p,q}^s}.$$

Peuve

D'après la preuve de la proposition 2.1 ,on a.

a) Le cas $\lambda > 1$.

$$\begin{aligned} \|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^s} &= \left\| \sum_{j \geq 1} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,q}^s} \\ &= \left\| \left(\sum_{k \geq 0} 2^{skq} \left| \sum_{j \geq 1} Q_k(h_\lambda Q_j f) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &\leq \left\| \sum_{j \geq 1} Q_0(h_\lambda Q_j f) \right\|_p + \left\| \left(\sum_{k \geq 1} 2^{skq} \left| \sum_{j \geq 1} Q_k(h_\lambda Q_j f) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Estimation de I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \sum_{j \geq 1} Q_0(h_\lambda Q_j f) \right\|_p \leq \|Q_0(h_\lambda Q_1 f)\|_p + \underbrace{\left\| \sum_{j \geq 2} Q_0(h_\lambda Q_j f) \right\|_p}_{=0} \\ \text{par Young} &\leq \|h_\lambda Q_1 f\|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \lambda^{-\frac{n}{p}} \|Q_1 f\|_p \\
&\leq c_1 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|Q_1 f\|_p \quad \text{car } \lambda > 1 \text{ et } s > 0 \\
&\leq c_2 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \left\| \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} |Q_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
&\leq c \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^s}.
\end{aligned}$$

Estimation de I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left\| \left(\sum_{k \geq 1} 2^{skq} \left| \sum_{j \geq 1} Q_k (h_\lambda Q_j f) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{m \geq 1} 2^{qs(N+m)} |h_\lambda Q_m f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
&\leq c \left\| \left(\sum_{m \geq 1} 2^{qs(N+m)} |Q_m f(\lambda \cdot)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
&\leq c_1 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \left\| \left(\sum_{m \geq 1} 2^{qsm} |Q_m f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
&\quad \text{car } 2^{qsN} \leq \lambda^{sq} \quad \text{donc} \\
I_2 &\leq c_2 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^s}.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que $\|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^s}$

Maintenant, on estimés la norme de $h_\lambda(Q_0 f)$

$$\begin{aligned}
\|h_\lambda Q_0 f\|_{F_{p,q}^s} &\leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{sjq} |Q_j (h_\lambda Q_0 f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
&\leq c' \left\| \left(\sum_{j=0}^{N+2} 2^{sjq} |h_\lambda Q_0 f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
&\leq c_1 \|h_\lambda(Q_0 f)\|_p \\
&\leq c_2 \lambda^{-\frac{n}{p}} \|Q_0 f\|_p \\
&\leq c_3 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|Q_0 f\|_p \\
&\leq c \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^s}
\end{aligned}$$

b) Le cas $\lambda < 1$. De même façon de la proposition 2.1 on trouve

$$\left\| \sum_{j \geq -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,q}^s} \leq c \lambda^{s - \frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^s}$$

et

$$\left\| \sum_{j < -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,q}^s} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^s}$$

fin on fin, nous avons

$$\|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} (\sup(\lambda, 1))^s \|f\|_{F_{p,q}^s}$$

■

Proposition 2.4. Soient $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s > 0$. Alors

h_λ est un opérateur borné sur $F_{p,q}^0$, et

$$\|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^0} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}.$$

Peuve

D'après la preuve de la proposition 2.3 ,on trouve .

a) Le cas $\lambda > 1$.

$$\begin{aligned} \|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^0} &= \left\| \sum_{j \geq 1} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,q}^0} \\ &= \left\| \left(\sum_{k \geq 0} \left| \sum_{j \geq 1} Q_k(h_\lambda Q_j f) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &\leq \left\| \sum_{j \geq 1} Q_0(h_\lambda Q_j f) \right\|_p + \left\| \left(\sum_{k \geq 1} \left| \sum_{j \geq 1} Q_k(h_\lambda Q_j f) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Estimation de I_1 :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left\| \sum_{j \geq 1} Q_0 (h_\lambda Q_j f) \right\|_p \leq \|Q_0 (h_\lambda Q_1 f)\|_p + \underbrace{\left\| \sum_{j \geq 2} Q_0 (h_\lambda Q_j f) \right\|_p}_{=0} \\
 &\quad \text{par young} \leq \|h_\lambda Q_1 f\|_p \\
 &\leq c_1 \lambda^{-\frac{n}{p}} \|Q_1 f\|_p \\
 &\leq c_2 \lambda^{-\frac{n}{p}} \left\| \left(\sum_{j \geq 0} |Q_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
 &\leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}.
 \end{aligned}$$

Estimation de I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left\| \left(\sum_{k \geq 1} \left| \sum_{j \geq 1} Q_k (h_\lambda Q_j f) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c_1 \left\| \left(\sum_{m \geq 1} |h_\lambda Q_m f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
 &\leq c_1 \left\| \left(\sum_{m \geq 1} |Q_m f(\lambda \cdot)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
 &\leq c_2 \lambda^{-\frac{n}{p}} \left\| \left(\sum_{m \geq 1} |Q_m f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p
 \end{aligned}$$

donc

$$I_2 \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}.$$

on trouve que $\|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^0} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}$

On estimés la norme de $h_\lambda(Q_0 f)$

$$\begin{aligned}
 \|h_\lambda Q_0 f\|_{F_{p,q}^0} &\leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{N+2} |Q_j (h_\lambda Q_0 f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
 &\leq c' \left\| \left(\sum_{j=0}^{N+2} |h_\lambda Q_0 f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\
 &\leq c_1 \|h_\lambda(Q_0 f)\|_p \\
 &\leq c_2 \lambda^{-\frac{n}{p}} \|Q_0 f\|_p \\
 &\leq c_3 \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}
 \end{aligned}$$

b) Le cas $\lambda < 1$.

$$\left\| \sum_{j \geq -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,q}^0} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}$$

et

$$\left\| \sum_{j < -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,q}^0} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}$$

On fin,

$$\|h_\lambda f\|_{F_{p,q}^0} \leq c \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,q}^0}$$

■

Proposition 2.5. *L'opérateur de dilatation h_λ est borné sur $F_{p,2}^s$ telle que $s \geq 0$ et $1 < p < \infty$; sa norme est majorée par $c \lambda^{-\frac{n}{p}} (\sup(\lambda, 1))^s$, ($F_{p,2}^s = H_p^s$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$).*

preuve

I) Le cas $\lambda > 1$.

$$\begin{aligned} \|h_\lambda f\|_{F_{p,2}^s} &= \left\| \sum_{j \geq 1} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,2}^s} \\ &\leq c \left\| \left(\sum_{j \geq 1} 2^{2s(N+j)} |h_\lambda(Q_j f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\leq c_1 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \left\| \left(\sum_{j \geq 1} 4^{sj} |Q_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\leq c_2 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,2}^s}. \end{aligned}$$

Pour le terme $h_\lambda(Q_0 f)$ telle que $s > 0$ et $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}
 \|h_\lambda(Q_0 f)\|_{F_{p,2}^s} &\leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{N+2} 4^{sj} |Q_j(h_\lambda Q_0 f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
 &\leq c_1 \lambda^s \left\| \left(\sum_{j=0}^{N+2} |Q_j(h_\lambda Q_0 f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
 &\leq c_2 \lambda^s \|h_\lambda(Q_0 f)\|_p \\
 &\leq c_3 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,2}^s}.
 \end{aligned}$$

II) Le cas $\lambda < 1$.

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{j \geq -N} h_\lambda(Q_j f) \right\|_{F_{p,2}^s} &\leq c \left\| \left(\sum_{j \geq -N} 4^{s(N+j)} |h_\lambda(Q_j f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
 &\leq c_1 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \left\| \left(\sum_{j \geq -N} 4^{sj} |Q_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
 &\leq c_2 \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{F_{p,2}^s}.
 \end{aligned}$$

■

Proposition 2.6. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ et $\tau \geq 0$. Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{\left(\frac{n}{p}\right)-s+n\tau} \|h_\lambda f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

pour toute $f \in \dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$.

Preuve Voir [2]

APPLICATION À LA COMPOSITION

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'opérateur de composition défini par $\mathcal{T}_f(g) := f \circ g$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. et donner quelques propriétés, et estimer $\|h_\lambda(f \circ g)\|$ d'après des résultats présidents .

Définition 3.1. (Espace de Wiener $BV_p^1(\mathbb{R})$)

Pour la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{V}_p(g) := \sup \left(\sum_{k=1}^N |g(b_k) - g(a_k)|^p \right)^{1/p},$$

pris sur toutes les ensembles finis $\{[a_k, b_k]; k = 1, \dots, N\}$ de les intervalles ouvert disjoint et paire .

On dit que la fonction g est de p -variation borne si $\mathcal{V}_p(g) < +\infty$.

Clairement ,si on considère une suite finie avec seulement deux termes,on obtient $|g(x) - g(y)| \leq \mathcal{V}_p(g)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, d'où g est une fonction bornée.

On note l'ensemble de (généralisé) les primitives des fonctions de p -variation borne par $BV_p^1(\mathbb{R})$ et on a la seminorme

$$\|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} := \inf \mathcal{V}_p(g),$$

où \inf est pris sur toutes fonctions g telle que f son primitive $\left(f(x) = \int g(x)dx \right)$.

Définition 3.2.

On définit l'opérateur de composition \mathcal{T}_f comme suivant $\mathcal{T}(g) = f \circ g$ telle que $g : X \longrightarrow Y$ et $f : Y \longrightarrow Z$

Définition 3.3.

On définit la classe des fonctions $U_p^1(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues lipschitziennes f , telles que ces dérivées dans le sens de distributions satisfaisent

$$A_p(f') := \left(\sup_{t>0} t^{-1} \int_{\mathbb{R}} \sup_{|h|\leq t} |f'(x+h) - f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

avec la seminorme

$$\|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} := \inf(\|g\|_{\infty} + A_p(g)),$$

où l'inf est pris sur toutes les fonctions g telle que f est une primitive de g .

Définition 3.4.

On définit aussi l'ensemble $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\|g\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R}^n)} := \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|g_{x'_j}\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}^p dx'_j \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

où $g_{x'_j}(y) := g(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 3.1.

Soient $0 < p, q < \infty$ et $0 < s < 1 + (1/p)$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \left(\|g\|_p + \|g\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R}^n)} \right) \quad (3.1)$$

valable pour toutes les fonctions $g \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{V}_p(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in U_p^1(\mathbb{R})$ satisfaisant $f(0) = 0$.

En outre, pour tous ces f , l'opérateur \mathcal{T}_f prend $L_p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{V}_p(\mathbb{R}^n)$ à $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [5]

On remplace maintenant g par $g(\lambda \cdot)$ dans (3.1), il revient alors :

$$\|f \circ g_{\lambda}\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \left(\|g_{\lambda}\|_p + \|g_{\lambda}\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R}^n)} \right)$$

où $\|g_\lambda\|_p = \lambda^{-n/p} \|g\|_p$ et $\|g_\lambda\|_{V_p(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{V_p(\mathbb{R}^n)}$.

Alors on a

$$\lambda^{n/p} \|f \circ g_\lambda\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \left(\|g\|_p + \lambda^{n/p} \|g\|_{V_p(\mathbb{R}^n)} \right)$$

ce qui donne :

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \lambda^{n/p} \|f \circ g_\lambda\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \|g\|_p.$$

Proposition 3.1.

$\forall \lambda > 0, \forall f$ et g comme dans le théorème (3.1), alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{n/p} \|f \circ h_\lambda g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \|g\|_p. \quad (3.2)$$

Comme $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n) \cap \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, donc dans (3.2) on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{n/p} \left(\|f \circ g_\lambda\|_p + \|f \circ g_\lambda\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \right) \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \|g\|_p.$$

Où : $\|f \circ g_\lambda\|_{\dot{F}_{p,q}^s} = c \lambda^{s-(n/p)} \|f \circ g\|_{\dot{F}_{p,q}^s}$

et $\|f \circ g_\lambda\|_p = \lambda^{-n/p} \|f \circ g\|_p$.

Donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\|f \circ g\|_p + c \lambda^s \|f \circ g\|_{\dot{F}_{p,q}^s} \right) \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \|g\|_p.$$

Corollaire 3.1.

$\forall f \in U_p^1(\mathbb{R}), \forall g \in L_p \cap V_p(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|f \circ g\|_p \leq c \|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} \|g\|_p.$$

Définition 3.5.

Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. l'espace de Triebel-Lizorkin homogènes $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de distributions modulo les polynôme f telle que

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sjq} |Q_j f|^q \right)^{1/p} \right\|_p < +\infty.$$

Lemme 3.1.

On a $\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$.

Alors $\|f \circ g(\lambda.)\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f \circ g(\lambda.)\|_p + \|f \circ g(\lambda.)\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$
 $\leq \lambda^{-n/p} \|f \circ g\|_p + c\lambda^{s-(n/p)} \|f \circ g\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$

si $s-(n/p) < 0$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ on a

$$\|f \circ g(\lambda.)\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Définition 3.6.

On définit l'espace de toutes les fonctions dans $L_\infty(\mathbb{R}) \cap \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})$, qui est noté par $\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et défini par

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_\infty + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Corollaire 3.2.

Soient $1 < p < +\infty$, $p \leq q \leq +\infty$ et $s > 1 + (1/p)$.

Il existe une constante c telle que l'inégalité

$$\|f \circ g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \left(\|g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} + \|g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right)$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f' \in \mathcal{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$ et toute $g \in \mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Corollaire 3.3.

Soient s, p, q des nombres comme dans corollaire 3.1.

➤ si $\lambda > 1$

$$\|f \circ g(\lambda.)\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \left(c\lambda^{s-(n/p)} \|g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} + c\lambda^{(s-(1/p))^2} \|g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right)$$

➤ si $\lambda < 1$

$$\|f \circ g(\lambda.)\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{\mathcal{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \left(c\lambda^{-(n/p)} \|g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} + c\lambda^{(-s/p)+(1/p^2)} \|g\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right).$$

Corollaire 3.4. Soient $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, et $s > 1 + (1/p)$.

Alors il existe une constante C telle que l'inégalité

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \left(\|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} + \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right) \quad (3.3)$$

valable pour toutes fonctions $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, et toutes fonctions $g \in F_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

D'après l'équation (3.3) on trouve

➤ si $\lambda > 1$

$$\|f \circ g(\lambda \cdot)\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \left(\lambda^{s-\frac{1}{p}} \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} + \lambda^{(s-\frac{1}{p})^2} \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right)$$

➤ si $\lambda < 1$

$$\|f \circ g(\lambda \cdot)\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \left(\lambda^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} + \lambda^{(-\frac{1}{p})(s-\frac{1}{p})} \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right).$$

Selon corollaire (3.4), il existe une classe substantielle de fonctions non linéaire f , pour lesquelles il existe une constante $c = c(f)$ telle que

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \left(\|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} + \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \right), \quad \forall g \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}). \quad (3.4)$$

On peut d'abord observer que (3.4) peut être décomposé en deux parties, en raison de la condition $s - (1/p) > 1$:

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} &\leq 2 \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \quad \text{si } \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq 1 \\ \|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} &\leq 2 \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \quad \text{si } \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \geq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\|f \circ g(\lambda \cdot)\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \lambda^{\frac{1}{p}} (\sup(\lambda, 1))^s \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \quad \text{si } \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq 1$$

$$\|f \circ g(\lambda \cdot)\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \lambda^{\frac{sp-1}{p^2}} (\sup(\lambda, 1))^{s^2-(s/p)} \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \quad \text{si } \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \geq 1.$$

Conclusion

Comme les espaces de Besov, Lizorkin-Triebel et de type de Besov coïncident avec d'autres espaces fonctionnels, à titre d'exemples :

- $B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_2^s(\mathbb{R}^n)$.
- $B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ et $s \notin \mathbb{N}$.
- $F_{p,2}^0 = L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty$.
- $F_{p,2}^m = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p < \infty, m \in \mathbb{N}^*$.
- $\dot{B}_{p,q}^{s,0}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.
- $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$, si $\tau < 0$.

Alors, les résultats de ce travail sont valables si on remplace $B_{p,q}^s$, $F_{p,q}^s$, $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}$ par l'un de ces espaces, donc ce travail couvre plusieurs espaces fonctionnels.

Bibliographie

- [1] G. Bergh, J. Löfström. *Interpolation Theory, An Introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **223**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [2] F. Bensaid, M. Moussai. *Realisations of the homogenous Besov-type space*. (Submitted).
- [3] D. Drihem. *Some embeddings and equivalent norms of the $\mathcal{L}_{p,q}^{\lambda,s}$ spaces*. Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, vol. 41, no. 1, pp. 15–40, 2009.
- [4] J. Franke. *On the space F_{pq}^s of Triebel-Lizorkin type : pointwise multipliers and spaces on domains*. Math. Nachr. **125** (1986), 29–68.
- [5] M. Moussai. *Composition operator on the space of functions Triebel-Lizorkin and bounded variation type*. Acta Math. Univ. Comenianae Vol. LXXXI, 2 (2012), pp. 171–183.
- [6] S. Meliani, M. Moussai. *Boundedness of pseudodifferential operators on realized homogeneous Besov spaces*. Taiwanese J. Math. **21** no. 2 (2017), 441–465.
- [7] J. Peetre. *New Thoughts on Besov Spaces*. Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976.
- [8] T. Runst, W. Sickel. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, de Gruyter, Berlin, 1996.
- [9] T. Ullrich. *Continuous characterizations of Besov-Lizorkin-Triebel spaces and new interpretations as coorbits*. J. Funct. Spaces Appl. 2012, Article ID 163213, 47 pp.
- [10] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*. Monographs in Mathematics **78**. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [11] H. Triebel. *Theory of Function Spaces II*. Monographs in Mathematics **84**. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [12] D. Yang, W. Yuan. *Relations among Besov-type spaces, Triebel-Lizorkin-type spaces and generalized Carleson measure spaces*. Appl. Anal. 92 (2013), 549–561.

- [13] W. Yuan, W. Sickel, D. Yang. *Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel*. Lecture Notes in Mathematics vol. 2005, Springer-Verlag, Berlin 2010.



ملخص:

ليكن التطبيق $h_\lambda f(x) := f(\lambda x)$ ، حيث $\lambda > 0$ و f دالة من فضاء بناخ E من \mathbb{R}^n إلى \mathbb{C} .

يتعلق الأمر بتقدير تنظيم مؤثر التحاكي h_λ الذي يعتبر بمثابة تشاكل من فضاءات بزوف ، فضاءات ليزوركين- تريبل أو

فضاءات من نوع $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

كلمات مفتاحية: تحاكي، فضاءات بزوف، فضاءات ليزوركين تركيب، تركيب.

Soit l'application $h_\lambda f := f(\lambda^{-1}(\cdot))$, où $\lambda > 0$ et f une fonction d'un espace de Banach E de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{C} . Il s'agit d'estimer la norme de l'opérateur de dilatation h_λ considéré comme un endomorphisme de l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ou de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Mots-Clés : Dilatation, Espace de Besov, Espace de Lizorkin-Triebel, Composition.

Let the application $h_\lambda f := f(\lambda^{-1}(\cdot))$, where $\lambda > 0$ and f a function of Banach space E of \mathbb{R}^n with values in \mathbb{C} . it is about estimating the norm of the dilation operator h_λ considered as an endomorphism of Besov space $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ or Besov-type $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Keywords : Dilation, Besov space, Triebel-Lizorkin space, Composition .